Devoir surveillé n°5
Durée 4 heures
Calculatrice interdite.

Quelques recommandations:

- *Attention la présentation des calculs et à la rédaction..*

Les exercices sont de niveaux différents

- $*$: exercice classique et considéré comme facile
- $**$: plus difficile
- $* * *$: difficile

Les exercices sont eux-mêmes gradués

Mode d'emploi

1. les étudiants qui ont moins de 9 de moyenne traitent le cours, et les exercices 1, 2, 3 et 4.
2. Ceux qui ont entre 9 et 15, traitent le cours, et les exercice 3, 4 et 5.
3. Ceux qui ont plus de 15 de moyenne font les exercices 3, 4, 5 et 6

Cours:

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, strictement positive sur $[0, 1]$, montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq A$
2. Calculer un équivalent pour x tendant vers $+\infty$ de $\ln \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^2}$
3. Calculer un équivalent pour x tendant vers $+\infty$ de $e^{1/x} - e^{1/(1+x)}$
4. Énoncer la formule de Leibnitz *hypothèses comprises.*
5. Énoncer le théorème de Rolle
6. Énoncer le théorème des accroissements finis

Exercice 1: *
On considère h définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2 + e^{-t} + 1} dt$

1. Justifier l'existence de $h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
2. Quel est le sens de variation de h?
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) \leq \dfrac{\pi}{2}$
4. Conclure sur la limite de $h(x)$ en $+\infty$ en prenant soin d'énoncer **précisément** le théorème utilisé.

Exercice 2* On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 3} \end{cases}$

Soit f l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+3}$.

1. **Étude de la fonction** f

   (a) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$. *On vérifiera que:* $f''(x) = \dfrac{(x^2+4x+5)e^x}{(x+3)^3}$

   (b) Étudier le sens de variation de f, quelle est l'image du segment $[0,1]$. *Énoncer le théorème employé*

   (c) Montrer que $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leq \dfrac{9}{16}$

   (d) Établir que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0,1]$, on note ℓ cette solution.

2. **Convergence de la suite**

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in [0,1]$

   (b) Étude de la convergence de (u_n): Première méthode

      i. Quel est le sens de variation de cette suite?

      ii. Conclure sur sa convergence et donner la limite.

   (c) Étude de la convergence de (u_n): Deuxième méthode

      i. Montrer que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{9}{16}|u_n - \ell|$

      ii. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{9}{16}\right)^n$.

      iii. Conclure sur la convergence de (u_n).

      iv. Soit $p > 0$ fixé, trouver, en fonction de p, n pour lequel u_n est valeur approchée de ℓ à la précision p près.

Exercice 3: * puis **

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note f_n la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_n(x) = x - n\ln x$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

   (b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ a dans $\mathbb{R}^{+*}$ deux solutions distinctes, on les note u_n et v_n avec $u_n < v_n$; montrer que $0 < u_n < n < v_n$.

2. Étude de la suite (u_n).

   (a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.

   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.

   (c) Montrer que (u_n) converge et montrer, en utilisant $\ln u_n$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   (d) En déduire, en utilisant un équivalent du cours, que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$, puis que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

3. étude de la suite (v_n).

   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   (b) Calculer $f_n(n\ln n)$ puis montrer que $\forall n \geq 3, \quad n\ln n < v_n$.

(c) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = x - 2\ln x$, étudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n > 2\ln n$.

(d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln n)$, puis établir que $n\ln n < v_n < 2n\ln n$.

(e) Montrer en utilisant l'encadrement précédent que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.

Exercice 4* puis ** On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ définie sur $]-1,+\infty[$.

1. Dérivées successives de f
   (a) Calculer, pour $x \in]-1,+\infty[$, les dérivées $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$
   (b) Etablir une conjecture pour l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour $x \in]-1,+\infty[$ et démontrer cette conjecture.
2. Rappeler la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral sans en oublier les hypothèses.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in]-1,+\infty[$, écrire le développement de Taylor-Lagrange de $\ln(1+x)$ à l'ordre n en 0.
4. On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$; on se propose d'étudier la suite $(S_n(x)$.
   (a) Écrire $R_n(x)$ sous forme d'une d'une intégrale.
   (b) Soit $x \in [0,1]$ fixé
      i. Après avoir montré que $\forall t \in [0,x]$ on a $0 \leq \dfrac{x-t}{1+t} \leq x-t$, montrer que $|R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
      ii. En déduire que $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ puis conclure sur $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.
      iii. En particulier, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$?
   (c) Pour $x \in]-1,0]$.
   Montrer de même que la suite $(S_n(x))$ converge et trouver sa limite.

Exercice 5: Concours Agro 2010 ** puis ***

Soit t un réel strictement positif. On définit la suite (x_n) par $\begin{cases} x_0 = t \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n} \end{cases}$

1. (a) On pose pour $x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \sqrt{x} - x$, étudier le signe de $g(x)$.
   (b) Montrer que, si $t \geq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que (x_n) converge et déterminer sa limite.
   (c) Etudier (x_n) si $t < 1$.
2. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}$$
   (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1}. en déduire le sens de variation de (u_n).
   (b) Déterminer le sens de variation de (v_n).
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \geq 0$.
   (d) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et montrer qu'elles convergent vers la même limite que l'on notera L.
   (e) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n. En déduire que
$$\forall t > 0 \quad 1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1$$

3. Comme L dépend de t, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = L$.
Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n(t) = x_n, u_n(t) = u_n, v_n(t) = v_n$ pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.
   (a) Déterminer $f(1)$ et calculer $\lim_{t\to 1} \frac{f(t)}{t-1}$. En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.
   (b) i. Montrer que $\forall (t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 * t_2) = x_n(t_1) * x_n(t_2)$.
   ii. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} (u_n(t_1 * t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2))$
   iii. Donner une relation entre $f(t_1 * t_2)$, $f(t_1)$ et $f(t_2)$.
   (c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall h$tel que $t + h \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(t+h) - f(t) = f\left(1 + \frac{h}{t}\right)$.
   (d) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer $f'(t)$ pour tout$t \in \mathbb{R}^{+*}$.
   (e) En justifiant votre réponse, exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles.
4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n en fonction de n et de t, Retrouver directement le résultat de la question précédente.

Exercice 6*** Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle ouvert I, on veut montrer que la fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires c'est-à-dire que, si a et b sont deux éléments de I et m un réel vérifiant $f'(a) < m < f'(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ (ou $]b, a[$) tel que $f'(c) = m$;

1. Montrer qu'il existe un réel h tel que $a + h$ et $b + h$ appartenant à I et que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$.
2. Soit g la fonction définie par $g(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$, montrer que g est définie et continue sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$) et en déduire l'existence d'un réel d de $]a, b[$ (ou $]b, a[$) tel que $m = g(d)$.
3. Conclure par le théorème des accroissements finis.